PAP 2.1
Versuch 212: "Viskosität"

Jonas Schweer

24. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
- 1.1 Ziel des Versuchs . . . 2
- 1.2 Versuchsaufbau . . . 2
- 1.3 Physikalische Grundlagen . . . 3
  - 1.3.1 Reibung eines Körpers in einer Flüssigkeit . . . 3
  - 1.3.2 Reynoldszahl . . . 3
  - 1.3.3 Kugelfallviskometer . . . 4
  - 1.3.4 Hagen-Poiseuille-Gesetz . . . 4

2 Messprotokoll **5**

3 Auswertung **8**
  - 3.0.1 Berechnung der Viskosität mit dem Kugelfallviskometer . . . 8
  - 3.0.2 Berechnung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille . . . 12

4 Zusammenfassung und Diskussion **14**

5 Anhang **15**

1 Einleitung

Anmerkung: Alle Bilder, welche in diesem Abschnitt verwendet wurden, sind aus dem Praktikumsskript übernommen worden.
Quelle: 'Physikalisches Praktikum PAP2.2 für Studierende der Physik B.Sc' - Jens Wagner, Februar 2025

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch wollen wir die Viskosität von Polyethylenglykol bestimmen. Dafür nutzen wir zwei verschiedene Methoden: einmal mit Hilfe eines Kugelfallviskometers nach Stokes und einmal mit dem Prinzip nach dem Hagen-Poiseuille. Zudem wollen wir bestimmen, wann die laminare Strömung um die Kugeln zu einer turbulenten wird, um so die Gültigkeitsgrenze des stokes'schen Gesetzes zu ermitteln.

1.2 Versuchsaufbau



Abbildung 1: Foto des Versuchsaufbaus

Der Versuch wird an einem Hartglaszylinder mit Messskala durchgeführt. Dieser ist mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, in diesem Versuch also Polyethylenglykol. Beigelegt sind Kugeln aus Polyacetal mit verschiedenen Durchmessern. In der ersten Versuchsreihe lassen wir besagte Kugeln in den Zylinder und messen ihre Geschwindigkeit. Für den zweiten Versuchsteil ist am unteren Ende des Zylinders eine Präzisionskapillare angebracht, durch welche wir die Flüssigkeit herauslassen können. Hier messen wir dann den Volumenstrom anhand der Zeit und dem ausgeflossenen Volumen. Oben an dem Zylinder ist außerdem ein Thermometer angebracht um die Temperatur der Flüssigkeit zu messen.

1.3 Physikalische Grundlagen

1.3.1 Reibung eines Körpers in einer Flüssigkeit

Wenn sich ein Körper in einem Medium bewegt, bewirken zwischenmolekulare Kräfte eine Reibungskraft, welche den Körper verlangsamt. Nach dem dritten newtonschen Gesetzt werden also die an dem Körper anliegenden Flächen der Flüssigkeit, welche ihn verlangsamen, auch mitbewegt. Durch deren Bewegung werden auch die Schichten immer weiter weg mitgezogen. Um diese Reibung zu quantifizieren, nutzt man folgendes Gedankenexperiment:

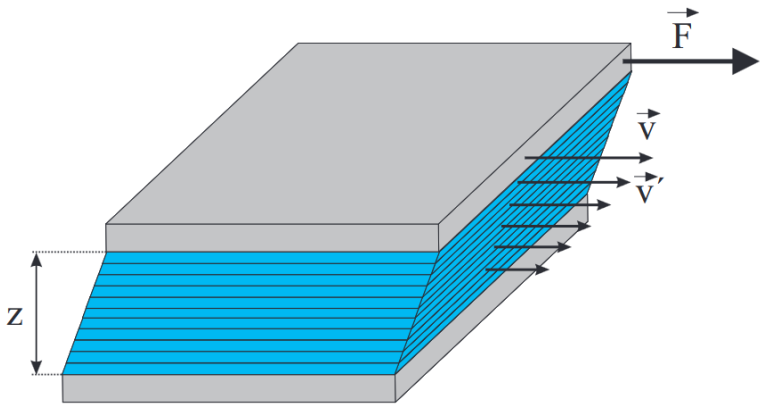


Abbildung 2: Gedankenexperiment zur Bestimmung der inneren Reibung

Hier sind beide Platten parallel ausgerichtet. Die eine Platte ruht und die andere Bewegt sich mit Geschwindigkeit v. Es ist eine Kraft F_r notwendig, um diese Geschwindigkeit aufrecht zu erhalten (aufgrund der Reibung). Dadurch, dass die Flüssigkeitsschichten an beiden Platten haften, müssen die Flüssigkeitsschichten in der Mitte aus Stetigkeitsgründen verschiedene Geschwindigkeiten haben. Für die Reibungskraft, welche bei gleichförmiger Bewegung der Reibungskraft gleichen muss, gilt dann:

$$F_r = \eta A \frac{v}{z} \tag{1}$$

bzw. mit Hilfe des Geschwindigkeitsgradienten:

$$F_r = \eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \tag{2}$$

Damit diese Gleichung allerdings Gültigkeit behält, muss die so genannte *Laminare Strömung* gegeben sein. Das heißt, dass man die Flüssigkeit tatsächlich wie in Abbildung 1 in Schichten betrachten kann. Wird die Geschwindigkeit des Körpers zu groß, so kommt es zur *Turbulenten Strömung*. Es bilden sich Wirbel und unser Modell mit den Schichten funktioniert nicht mehr.

1.3.2 Reynoldszahl

Die Reynoldszahl ist ein Maß dafür, ab wann sich Flüssigkeiten laminar oder turbulent verhalten. Allgemein beschreibt sie das Verhältnis der doppelten kinetischen Energie

eines Volumenelements und der Reibungsverluste.

$$Re = \frac{2E_{\text{kin}}}{W_{\text{Reibung}}} \tag{3}$$

Wenn diese Reynoldszahl einen kritischen Wert Re_{krit} übersteigt, so wird die Strömung turbulent, unter dem Wert ist sie laminar. Allerdings ist die kritische Reynoldszahl eher ein Richtwert. Auch unter ihr können turbulente Strömungen auftreten und über ihr laminare.
Man kann auch aus der Geometrie des Strömungssystems eine charakteristische Länge L bestimmen. Mit dieser kann man nun auch die Reynoldszahl definieren als:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta} \tag{4}$$

dabei ist v die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und ρ die Dichte der Flüssigkeit. Bei der Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit gilt beispielsweise: $L = d_{\text{Kugel}}$ mit d_{Kugel} als Kugeldurchmesser und $Re_{\text{krit}} \approx 1$. Für Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr hingegen gilt $L = d_{\text{Rohr}}$ mit d_{Rohr} als Rohrdurchmesser und $Re_{\text{krit}} \approx 2300$.

1.3.3 Kugelfallviskometer

Lässt man eine Kugel in ein Kugelfallviskometer fallen, so wirken auf sie Gewichtskraft F_g, Auftriebskraft F_a und Reibungskraft F_g. Mit $F_g = \rho_k V_k g$ und $F_a = -\rho_f V_k g$ folgt für die Kugel nach einer kurzen Beschleunigungsphase eine gleichförmige Bewegung in der gelten muss:

$$F_g + F_a + F_r = 0 \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow F_r = \frac{4}{3}\pi g(\rho_f - \rho_k)r^3 \tag{6}$$

Die Reibung einer Kugel mit Radius r beim Bewegen in einer Flüssigkeit ist nach Stokes durch $F_r = 6\pi\eta r v$ gegeben. Diese Formel gilt allerdings nur für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten bei laminarer Strömung. Wenn man für ein Rohr mit Radius R korrigieren möchte, muss man den den Ladenburg'schen Korrekturfaktor $\lambda = (1 + 2.1 \cdot \frac{r}{R})$ an die Reibung multiplizieren:

$$F_r = 6\pi\eta r v \lambda \tag{7}$$

Für $r \ll R$ kann man allerdings $\lambda \approx 1$ annehmen. Damit kann man dann aus Formel (6) die Viskosität bestimmen als:

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_k - \rho_f)}{v_s} r^2 \tag{8}$$

wobei v_s die Sinkgeschwindigkeit der Kugel ist.

1.3.4 Hagen-Poiseuille-Gesetz

Damit eine Flüssigkeit durch ein Rohr mit Radius R strömt muss eine Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ an den Stirnflächen herrschen. Betrachten wir nun das Verhalten analog zu Abbildung 2, mit dem Unterschied, dass nun Zylinderflächen aneinander vorbeigleiten,

wirkt auf einen dieser Zylinder mit Radius $r < R$ aufgrund der Druckdifferenz folgende Kraft:

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2) \tag{9}$$

allerdings wirkt nach Formel (2) auch die Reibungskraft

$$F_r = -2\pi r L \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \tag{10}$$

Wenn sich die Flächen mit konstanter Geschwindigkeit bewegen gilt also $F_r = F_p$ und damit nach umstellen:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r \tag{11}$$

Integrieren wir das nun über r, wobei wir die Randbedingung $v(R) = 0$ haben, ist die Geschwindigkeit einer Zylinderfläche:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \tag{12}$$

Um nun den Volumenstrom $\dot{V}$ zu bestimmen, müssen wir die Geschwindigkeit über die komplette Querschnittsfläche integrieren:

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi r v(r)\, \mathrm{d}r = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8\eta L} \tag{13}$$

Wenn wir also den Volumenstrom messen und alle nötigen externen Parameter kennen, können wir die Viskosität so bestimmen:

$$\eta = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8 \dot{V} L} \tag{14}$$

2 Messprotokoll

Messprotokoll 212: Viskosität

05.03.25
Harish Mahendran
Jonas Schweer

Messaufbau: - Messzylinder aus Hartglas, gefüllt mit Polyethylenglycol
- Kugeln aus Polyacetal mit verschiedenen Durchmessern
- Thermometer
- Maßstab
- Pinzetten
- Stoppuhren
- Bechergläser

Aufgabe 1: Kugelfallviskometer

Wir legen die Fallstrecke der Kugeln fest: $s = \begin{cases} 200\,mm & d > 5\,mm \\ 100\,mm & 2\,mm \leq d \leq 5\,mm \\ 50\,mm & 1\,mm = d \end{cases}$

Nun lassen wir von jedem Durchmesser fünf Kugeln in der Flüssigkeit sinken, und messen deren Falldauer durch den bestimmten Bereich mittels Handstoppuhren. Auch notieren wir immer die Temperatur des Polyethylenglycols.

Der Innendurchmesser des Fallgefäß lautet: $d_g = 7{,}5\,mm$

Durchmesser d[mm]	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	T_4 [s]	T_5 [s]	ϑ [°C]	$\bar{T}$ [s]
1	66,47	68,61	66,23	69,23	67,00	22	67,5 ± 1,2
2	42,76	44,76	44,86	46,62	46,36	22	45,1 ± 1,4
3	20,37	21,25	19,36	19,84	19,7	22	20,1 ± 0,7
4	12,78	12,93	12,87	12,33	12,65	22	12,71 ± 0,21
5	7,37	8,07	7,54	7,31	7,67	22	7,59 ± 0,27
6	12,31	12,42	12,02	12,02	12,09	22	12,17 ± 0,16
7	9,07	9,15	9,01	9,21	9,21	22	9,13 ± 0,08
8	7,34	7,53	7,50	7,28	7,43	22	7,42 ± 0,09
9	6,12	6,48	6,37	6,48	6,14	22	6,32 ± 0,16

Fehler: 25 µm Fehler: Standardfehler der Messung Fehler: ± 1

Tabelle 1: Fallzeit bei verschiedenen Kugeldurchmessern

Aufgabe 2: Kapillarviskometer

Wir öffnen den Ausfluss des Rohres. Sobald sich der Flüssigkeitsstrom stabilisiert hat, lesen wir den Füllstand h_A ab, stellen einen Messzylinder unter den Ausguss und starten die Stoppuhr. Wir notieren alle 5 cm^3 Volumen die Zeit.

V [cm^3]	T [s]
5	130
10	257
15	362
20	535
25	674

$h_A = (92 \pm 1)$ mm (Anfangshöhe)

$h_E = (87 \pm 1)$ mm (Endhöhe)

$T = (22 \pm 1)$ °C (Raumtemp)

$\Delta T = \pm 4$ s

5. März Y. Obispo

Tabelle 2: Zeit pro geflossenes Volumen

3 Auswertung

3.0.1 Berechnung der Viskosität mit dem Kugelfallviskometer

Wir wissen aus Formel (8), dass für die Sinkgeschwindigkeit gelten muss:

$$v_s = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_k - \rho_f)}{\eta} r^2 \tag{15}$$

Wenn wir nun also v_s gegen r^2 plotten, sollten wir im Optimalfall einen linearen Zusammenhang beobachten können. Da wir es aber hier nicht mit einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit zu tun haben, plotten wir in das selbe Diagramm die korrigierte Geschwindigkeit $v_{\text{korr}} = \lambda v_s$. Da wir die Geschwindigkeit der Kugel aus unseren Zeitmessungen bestimmen, müssen wir alle Werte und Fehler die wir brauchen nach folgenden Formeln bestimmen:

$$v_s = \frac{d}{T} \tag{16}$$

$$\Delta v_s = \frac{d}{T^2} \Delta T \tag{17}$$

$$v_{\text{korr}} = \lambda v_s \tag{18}$$

$$\Delta v_{\text{korr}} = \sqrt{(v_s \Delta\lambda)^2 + (\lambda \Delta v_s)^2} \tag{19}$$

$$\lambda = (1 + 2.1 \cdot \frac{r}{R}) \tag{20}$$

$$\Delta\lambda = 2.1 \sqrt{(\frac{\Delta r}{R})^2 + (\frac{r}{R^2} \Delta R)^2} \tag{21}$$

$$\Delta(r^2) = 2r\Delta r \tag{22}$$

Die Fehler wurden hier jeweils nach Gauß bestimmt. Dabei ist d die Distanz, die die Kugel in der Zeitspanne T zurückgelegt hat. r ist der Kugelradius und R der Rohrradius.

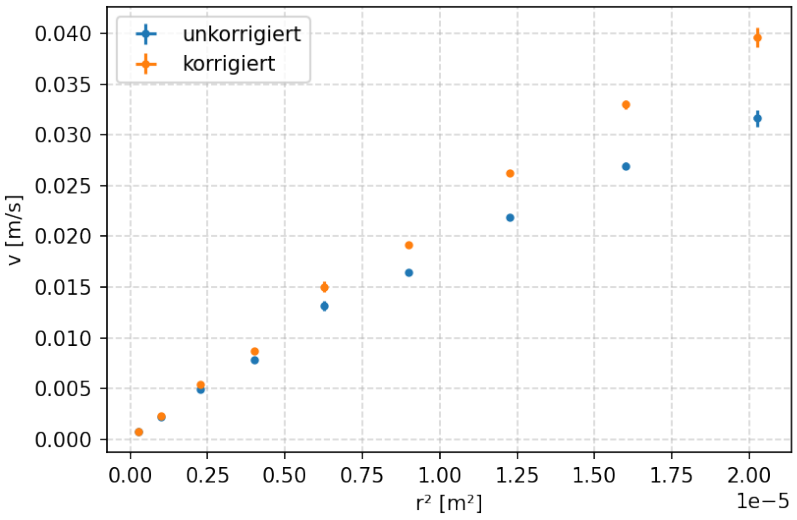


Abbildung 3: Korrigierte und unkorrigierte Geschwindigkeit gegen die Zeit aufgetragen

Wir sehen, dass schon bei dem 4. Kugelradius gut sichtbare Abweichungen durch die Korrektur entstehen, die immer Stärker werden, je größer der Radius wird. Die Korrektur ist also bei weiterer Berechnung keineswegs zu vernachlässigen. Aus Formel (15) können wir durch umstellen herausfinden, dass uns die Steigung des Diagramms $m = \frac{\lambda v_s}{r^2}$ dabei hilft, die Viskosität zu berechnen:

$$m = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_k - \rho_f)}{\eta} \Leftrightarrow \eta = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_k - \rho_f)}{m} \tag{23}$$

Der Fehler ist dann somit

$$\Delta\eta = \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho_f}{\rho_k - \rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho_k}{\rho_k - \rho_f}\right)^2} \tag{24}$$

Die Steigung des Graphen erhalten wir durch die curve-fit Funktion in Python. Wir fitten also eine Ursprungsgerade durch die korrigierten Messwerte und lassen uns die Steigung mit Fehler ausgeben:

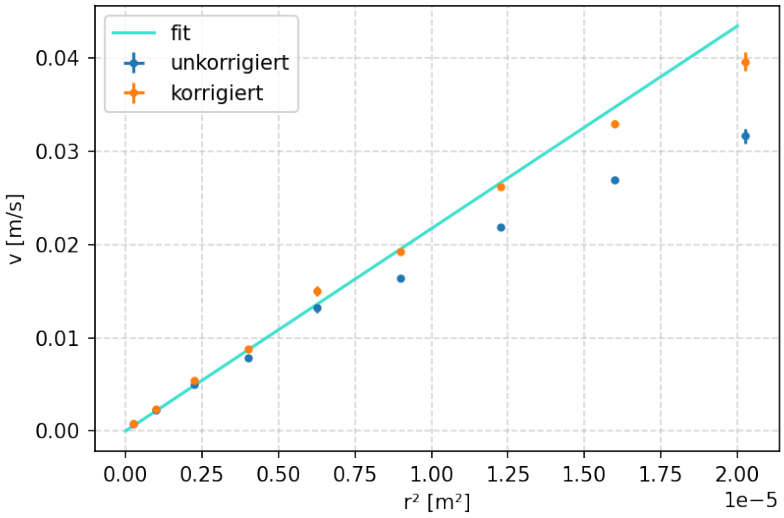


Abbildung 4: Fitgerade durch die korrigierten Messwerte

Die Steigung lautet:

$$\boxed{m = (2171 \pm 11)\frac{1}{\text{ms}}}$$

Die Dichte der Kugeln ist bereits angegeben und lautet:

$$\boxed{\rho_k = (1385 \pm 15)\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$$

Nun fehlt nur noch die Dichte der Flüssigkeit. Um diese zu berechnen ist im Praktikumsskript (Quelle: Jens Wagner, Februar 2025) eine Grafik hinterlegt, aus der wir sie mit unserer gemessenen Temperatur von $T = (22.0 \pm 1.0)°\text{C}$ ablesen können:

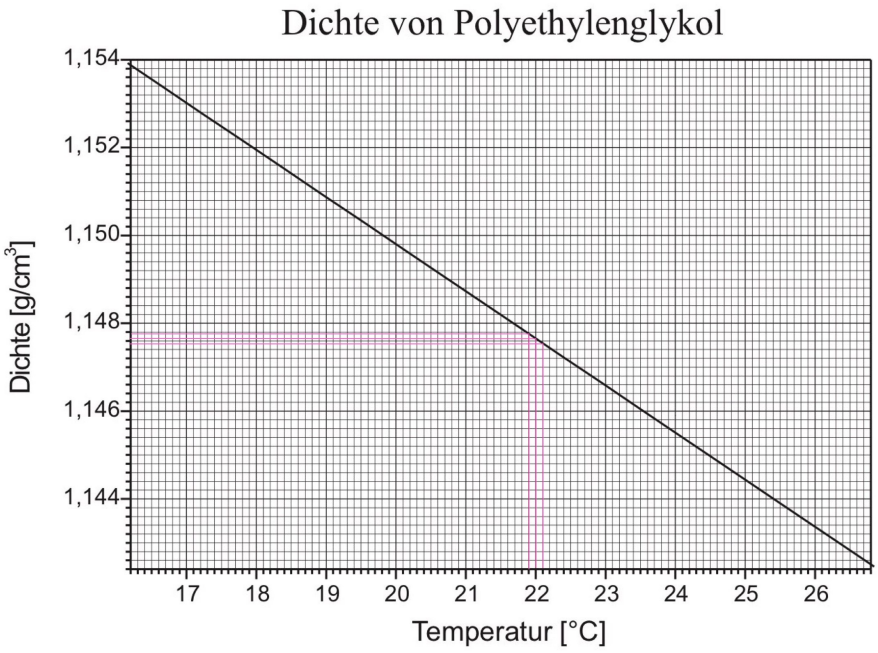


Abbildung 5: Dichte von Polyethylenglykol mit eingezeichneter Temperatur (rosa)

Unsere Dichte lautet somit:

$$\boxed{\rho_f = (1147.62 \pm 0.06)\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}$$

Mit diesen Werten können wir jetzt die Viskosität nach Formel (23) bestimmen als:

$$\boxed{\eta = (0.238 \pm 0.015)\mathrm{Pa\,s}}$$

Diesen Wert können wir nun nutzen, um mit Formel (15) die theoretisch erwarteten Geschwindigkeiten der Kugeln v_{lam} zu berechnen. Wir tragen sie in eine Tabelle gegen die gemessenen Geschwindigkeiten auf, und berechnen mit Formel (25) die Abweichungen:

$$\sigma = \frac{|x - y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \tag{25}$$

Den Fehler für die Geschwindigkeiten lautet nach Gauß:

$$\Delta v_{\mathrm{lam}} = v_{\mathrm{lam}} \sqrt{\left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho_f}{\rho_k - \rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho_k}{\rho_k - \rho_f}\right)^2} \tag{26}$$

Die Tabelle lautet:

r [mm]	v_{lam} [mm/s]	v_{korr} [mm/s]	σ
0.500 ± 0.0125	0.54 ± 0.06	0.761 ± 0.014	3.8
1.000 ± 0.0125	2.17 ± 0.20	2.34 ± 0.07	0.8
1.500 ± 0.0125	4.9 ± 0.4	5.39 ± 0.19	1.0
2.000 ± 0.0125	8.7 ± 0.8	8.75 ± 0.14	0.1
2.500 ± 0.0125	13.6 ± 1.2	15.0 ± 0.5	1.1
3.000 ± 0.0125	19.5 ± 1.8	19.19 ± 0.25	0.2
3.500 ± 0.0125	26.6 ± 2.4	26.20 ± 0.23	0.2
4.000 ± 0.0125	35 ± 3	33.0 ± 0.4	0.6
4.500 ± 0.0125	44 ± 4	39.6 ± 1.0	1.1

Tabelle 1: Theoretische Geschwindigkeit der Kugeln v_{lam} gegen gemessene, korrigierte Geschwindigkeit v_{korr}

Nun wollen wir mit dieser Viskosität nach Formel (4) die Reynoldszahl für alle Radien berechnen. Dabei nutzen wir für v die gemessene Sinkgeschwindigkeit und L der Kugeldurchmesser. Der Fehler ist:

$$\Delta Re = Re\sqrt{\left(\frac{\Delta\rho_f}{\rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_s}{v_s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 +} \tag{27}$$

Somit erhalten wir:

r [mm]	Re
0.500 ± 0.0125	0.00357 ± 0.00025
1.000 ± 0.0125	0.0214 ± 0.0015
1.500 ± 0.0125	0.072 ± 0.005
2.000 ± 0.0125	0.152 ± 0.010
2.500 ± 0.0125	0.317 ± 0.023
3.000 ± 0.0125	0.48 ± 0.03
3.500 ± 0.0125	0.74 ± 0.05
4.000 ± 0.0125	1.04 ± 0.07
4.500 ± 0.0125	1.37 ± 0.09

Tabelle 2: Reynoldszahl bei jedem Kugelradius

Nun wollen wir das Verhältnis der gemessenen Geschwindigkeit v_{s} und v_{lam} gegenüber der Reynoldszahl in logarithmischem Maß auftragen und daraus versuchen, die Kritische Reynoldszahl abzuschätzen. Der Fehler von $v_{\text{s}}/v_{\text{lam}}$ lautet:

$$\Delta\left(\frac{v_{\text{s}}}{v_{\text{lam}}}\right) = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_{\text{s}}}{v_{\text{lam}}}\right)^2 + \left(\frac{v_{\text{s}}}{v_{\text{lam}}^2}\Delta v_{\text{lam}}\right)^2} \tag{28}$$

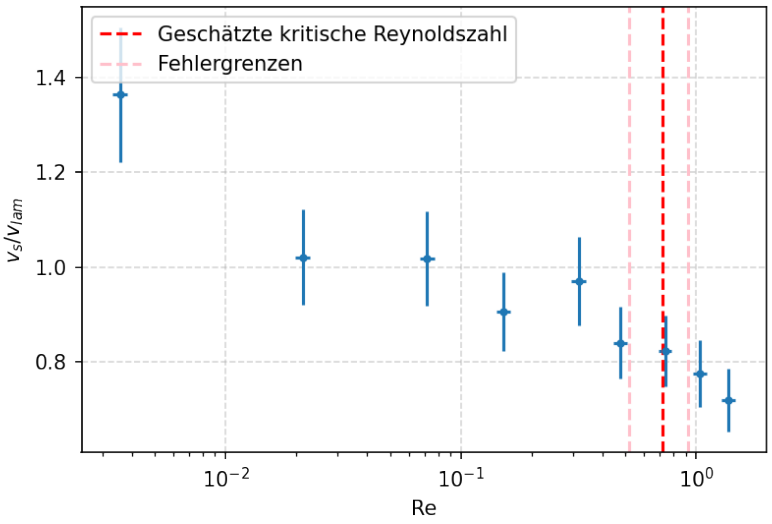


Abbildung 6: v_s/v_{lam} gegen Re mit eingezeichneter kritischer Reynoldszahl

Da wir aus Tabelle 1 bereits davon ausgehen können, dass bei unserer Messung mit der 1mm Radius Kugel etwas schiefgelaufen ist, vernachlässigen wir diesen Wert beim bestimmen der kritischen Reynoldszahl. An der Stelle, in der die rote Linie eingezeichnet ist, kann man erkennen, dass der Verlauf der Punkte etwas abknickt. Deshalb haben wir den Wert festgelegt als:

$$\boxed{Re_{\text{krit}} = 0.72 \pm 0.2}$$

3.0.2 Berechnung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille

Wir wollen nun die Viskosität nach Hagen-Poiseuille bestimmen. Dafür nutzen wir Formel (14). Die Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ ersetzen wir mit dem hydrostatischen Druck:

$$p = \rho_f g h \tag{29}$$

$$\Delta p = g\sqrt{(h\Delta\rho_f)^2 + (\rho_f \Delta h)^2} \tag{30}$$

Da sich die Höhe der Flüssigkeit während der Messung ändert, nutzen wir für h den Mittelwert. Dieser lautet:

$$\boxed{\bar{h} = (489.5 \pm 0.7)\text{mm}}$$

Der Druck lautet dann also:

$$\boxed{p = (5509 \pm 8)\text{Pa}}$$

Um nun den Volumenstrom $\dot{V}$ zu bestimmen, plotten wir die Werte aus Tabelle 2 des

Messprotokolls. Fitten wir nun eine Gerade durch die Messwerte, so ist die Steigung dieser unser $\dot{V}$. Der Fit sieht dann so aus:

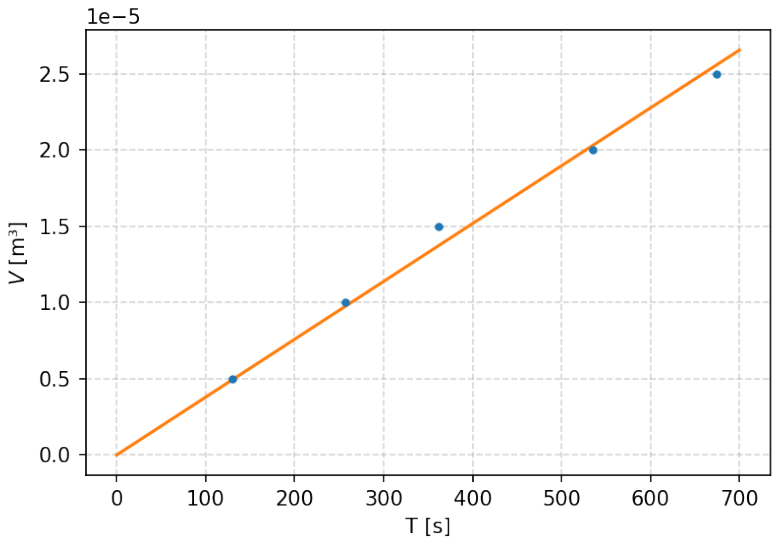


Abbildung 7: Ausgeflossenes Volumen pro Zeit

Die Steigung (und somit unser $\dot{V}$) lautet:

$$\boxed{\dot{V} = (37.9 \pm 0.7)\frac{\text{mm}^3}{\text{s}}}$$

Wenn wir nun noch die Daten $R = (0.750 \pm 0.005)$mm und $L = (100.0 \pm 0.5)$mm aus dem Praktikumsskript (Quelle: Jens Wagner, Februar 2025) übernehmen, ergibt sich die Viskosität als:

$$\boxed{\eta = (0.180 \pm 0.008)\text{Pa s}}$$

Den Fehler haben wir hier berechnet nach:

$$\Delta\eta = \eta\sqrt{\left(\frac{\Delta\dot{V}}{\dot{V}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta R}{R}\right)^2} \tag{31}$$

Nun wollen wir erneut mit Formel (4) die Reynoldszahl bestimmen. Dabei müssen wir v ersetzen mit $v = \frac{\dot{V}}{\pi r^2}$ Die Formel mit ihrem Fehler lautet also:

$$Re = \frac{2\rho\dot{V}}{\pi\eta r} \tag{32}$$

$$\Delta Re = Re\sqrt{\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\dot{V}}{\dot{V}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 + } \tag{33}$$

Die Reynoldszahl ist dann:

$$\boxed{Re = 0.205 \pm 0.010}$$

Was deutlich unter der Kritischen Reynoldszahl ist und somit tatsächlich von laminarer Strömung ausgegangen werden kann.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir in diesem Versuch die Viskosität von Polyethylenglykol über zwei Verschiedene Wege bestimmt: Einmal mit einem Kugelfallviskometer und einmal über eine Volumenstrommessung. Mit der Messung im Kugelfallviskometer haben wir zudem zurückgerechnet, welche Sinkgeschwindigkeit bei laminarer Strömung erwartet worden wäre. Zudem haben wir für alle Radien die Reynoldszahl berechnet und dann aus dem Verhältnis zwischen gemessener und erwarteter Geschwindigkeit die kritische Reynoldszahl bestimmt. Die Reynoldszahl haben wir im zweiten Versuchsteil auch bestimmt um uns zu vergewissern, dass wir es tatsächlich mit laminarer Strömung zu tun hatten.
Die Abweichungen im ersten Abschnitt zwischen gemessener Geschwindigkeit (korrigiert für endlich ausgedehnte Flüssigkeiten) und theoretischer Geschwindigkeit sind in Tabelle 1 festgehalten. Hier sind im allgemeinen sehr kleine Abweichungen festzustellen. Ausschließlich der Wert für $r = 0.5\text{mm}$ weißt eine Abweichung auf, die größer als 3σ ist. Das ist erst mal verwunderlich, da bei diesem Radius der Korrekturfaktor λ quasi immer noch ≈ 1 ist und somit keinen großen Unterschied macht (miteinberechnet ist er trotzdem). Zudem tritt bei diesem Radius laut Tabelle 2 die niedrigste Reynoldszahl auf. Also ist dieser Radius der, der am ehesten laminar sein sollte. Somit sollte das auch nicht gestört haben.
Eine mögliche Fehlerquelle hier ist die Tatsache, dass die Kügelchen so klein sind, dass schon kleine Ungenauigkeiten in der Durchführung verfälschen. Beispielsweise nicht genau mittiges Einwerfen der Kugeln, kleine Bläschen in der Flüssigkeit, Erschütterungen des Rohres oder auch einfach ungenaues Messen der Zeit (da man das Kügelchen schwer genau auf der Linie misst und aufgrund der langsamen Geschwindigkeit der genaue Stoppzeitpunkt verwaschen wird) haben bei diesen Kugeln einen viel größeren Einfluss als bei den anderen. Meine Vermutung wäre also, dass diese Faktoren die Messung verfälscht haben. Man erkennt an dem Messprotokoll auch, dass die Messung bei diesem Radius auch die zweitgrößte Schwankung der Daten hat.
Die kritische Reynoldszahl, welche wir in Abschnitt 1 bestimmt haben, lautete:

$$\boxed{Re_{\text{krit}} = 0.72 \pm 0.2}$$

Der Richtwert für eine Kugel, die durch eine Flüssigkeit treibt, lautet $Re_{\text{krit}} \approx 1$. Von diesem Wert weichen wir nach Formel (25) ab um:

$$\boxed{\sigma_{Re} = 1.4}$$

Wir sind also auch hier recht nah an dem Richtwert, wir können systematische Fehler also eher ausschließen. Da der Wert von $Re_{\text{krit}} \approx 1$ auch keinen festen Übergangswert festlegt, sondern eher nur zu Orientierung dient, ist ein exakter Vergleich sowieso nicht

sinnvoll.
Der Wert für die Viskosität aus dem ersten und zweiten Versuchsteil lauteten:

$$\boxed{\eta_1 = (0.238 \pm 0.015)\text{Pa s}}$$
$$\boxed{\eta_2 = (0.180 \pm 0.008)\text{Pa s}}$$

Die Abweichung der beiden Werte lautet:

$$\boxed{\sigma_\eta = 3.4}$$

Mindestens einer der beiden Werte scheint also falsch bestimmt worden zu sein. Da es bei dem ersten Versuchsteil deutlich mehr Messdaten gab, und mit der Viskosität wieder richtig auf die gemessenen Geschwindigkeiten zurückgerechnet werden konnte, liegt es nahe, dass der Fehler in der zweiten Messung entstanden ist. Mögliche Fehlerquellen hier sind unter anderem, dass auch hier wieder das genaue Timing der Stoppuhr nicht ganz genau machbar war. Man sieht in Abbildung (7) zum daher, dass der eine Messpunkt zu weit oben zu sein scheint. Außerdem wurde der Gradient in Abbildung (7) nur anhand von 5 Messpunkten erstellt. Das ist sehr fehleranfällig. In Messreihe 1 haben wir genau so viele Messungen pro Radius durchgeführt, wir haben also aus 45 Messungen gemittelt. Hinzu kommt außerdem, dass in Messreihe 2 auch noch Faktoren wie Kapillarkräfte mitwirken, die den Volumenfluss verfälschen werden. Es ist also anzunehmen, dass η_1 zumindest näher an dem Echtwert liegt, als η_2
Bei einer erneuten Versuchsdurchführung würde ich also vor allem mehrere Messreihen des Volumenstroms durchführen um so potentielle Schwankungen zu erkennen und zu reduzieren. Auch würde ich, sofern möglich, eventuell ein etwas breiteres Auslassrohr verwenden, da so die Zeit einfacher zu stoppen ist. Dabei müsste man allerdings darauf achten, dass der Ausfluss auch wesentlich schneller Ablaufen würde ($\dot{V} \propto R^4$) (und sich dann auch der Druck schneller ändert $\rightarrow$ ggf. keine Mittlung mehr möglich?). Hier müsste man also herumprobieren was konstantere Ergebnisse liefert. Ich bin mir aber sicher, dass die 1.5mm Durchmesser auch nicht willkürlich gewählt wurden.
Ebenfalls eine denkbare Verbesserung wäre ein etwas besserer 'Kugelfallmechanismus'. Wir haben die Kugeln per Pinzette in die Flüssigkeit fallen lassen. Dabei ist es aber leicht geschehen, dass die Kugel nicht wirklich mittig in das Rohr fällt oder Luftblasen mitnimmt. Wir haben es so gut es geht vermieden, aber ganz los konnten wir es nicht werden. Vor allem für die kleinen Kugeln würde es sich außerdem eventuell anbieten, die Messsäule mit einer Kamera zu zu filmen, sodass man im Nachhinein ohne Druck genau den Moment heraussuchen kann, in dem die Kugel die Linie überschreitet. Das würde dann auch die Wiederholbarkeit und Genauigkeit verbessern.
Alles in allem bin ich allerdings zufrieden mit unseren Ergebnissen. Vor allem das Kugelfallviskometer scheint vielversprechende Ergebnisse geliefert zu haben, und so konnten wir die Viskosität von Polyethylenglykol bestimmen.

5 Anhang

Versuch 212

March 24, 2025

Versuch 212: Zähigkeit

[1]:
```
#imports
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.constants as c
from scipy.optimize import curve_fit
```

[2]:
```
#Dateipfade
INPUT_DIRECTORY = "../Input_Data/Versuch 212/"
OUTPUT_DIRECTORY = "../Plots/Versuch 212/"
```

[3]:
```
#Skriptdaten
rho_K = (1.37+1.40)/2 * 1e3
Delta_rho_K = 1.40e3-rho_K
rho_F = 1.14762e3
Delta_rho_F = 0.06e-3
r_kap = 0.75e-3
Delta_r_kap = 0.005e-3
L_kap = 100e-3
Delta_L_kap = 0.5e-3
```

[4]:
```
#coole Funktionen
def lin(x,a):
    return (a*x)
def lambd(R,r):
    return (1 + 2.1 * r / R)
def Delta_lambd(R,Delta_r):
    return (2.1 * Delta_r / R)
```

Aufgabe 1

[5]:
```
#Aufgabe 1 Daten
d = np.linspace(1,9,9) * 1e-3
Delta_d = 25e-6
s = np.array([50,100,100,100,100,200,200,200,200])* 1e-3
temp = 22
Delta_temp = 1
```

```
T = np.array([67.5,45.1,20.1,12.71,7.59,12.17,9.13,7.42,6.32])
Delta_T = np.array([1.2,1.4,0.7,0.21,0.27,0.16,0.08,0.09,0.16])
inner_d = 75e-3
```

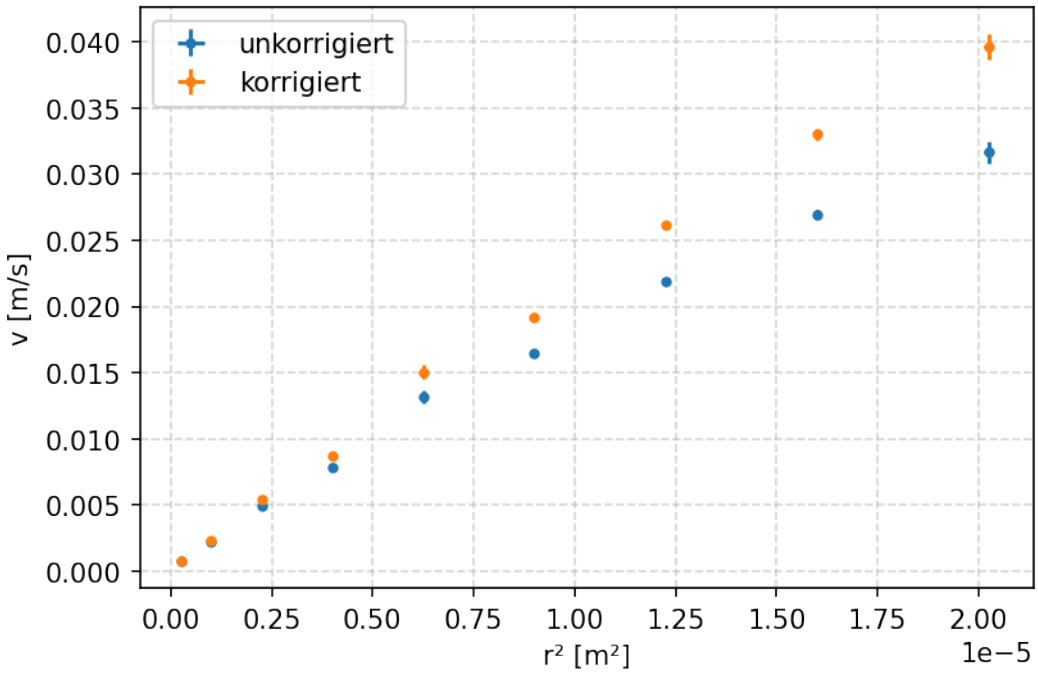
[6]:
```
v = s/T
Delta_v = v * Delta_T/T
v, Delta_v
```

[6]:
```
(array([0.00074074, 0.00221729, 0.00497512, 0.00786782, 0.01317523,
        0.01643385, 0.02190581, 0.02695418, 0.03164557]),
 array([1.31687243e-05, 6.88295534e-05, 1.73263038e-04, 1.29995463e-04,
        4.68684091e-04, 2.16057239e-04, 1.91945718e-04, 3.26937468e-04,
        8.01153661e-04]))
```

[7]:
```
v_korr = v* lambd(inner_d/2,d/2)
Delta_v_korr = v_korr * np.sqrt((Delta_v/v)**2 + (Delta_lambd(inner_d/2,␣
 ↪Delta_d/2)/lambd(inner_d/2,d/2))**2)
v_korr, Delta_v_korr
```

[7]:
```
(array([0.00076148, 0.00234146, 0.00539303, 0.00874902, 0.01501976,
        0.01919474, 0.02619934, 0.03299191, 0.03962025]),
 array([1.35473752e-05, 7.27005785e-05, 1.87849418e-04, 1.44659832e-04,
        5.34379455e-04, 2.52616919e-04, 2.30078632e-04, 4.00616021e-04,
        1.00328896e-03]))
```

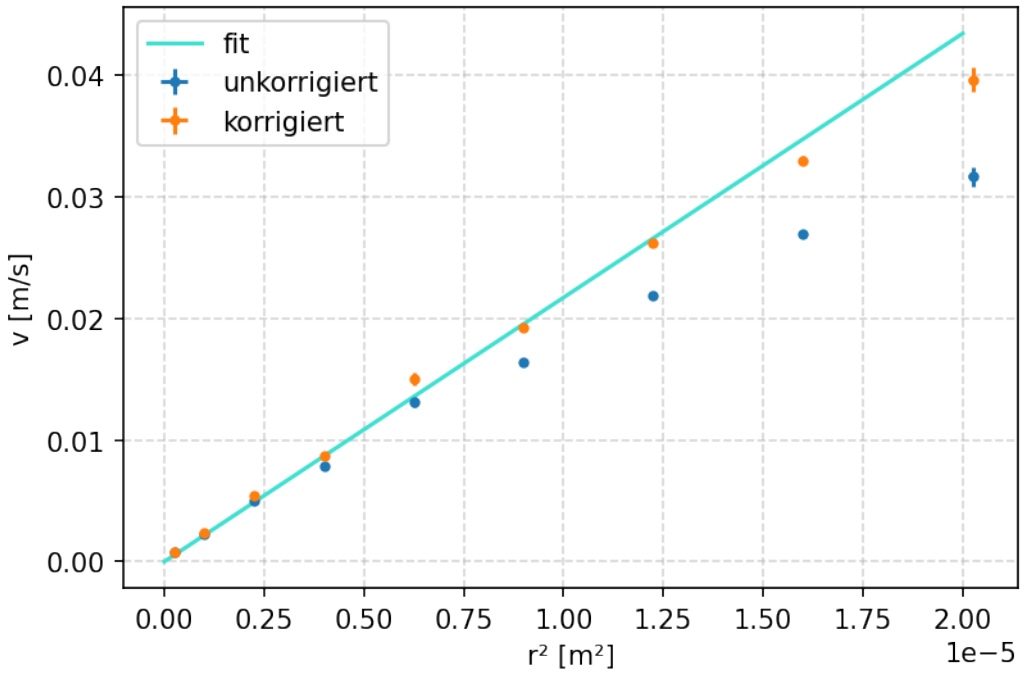
[8]:
```
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar((d/2)**2,v, fmt = ".", label = "unkorrigiert", yerr = Delta_v,␣
 ↪xerr = d*(Delta_d/2))
plt.errorbar((d/2)**2,v_korr, fmt = ".", label = "korrigiert", yerr =␣
 ↪Delta_v_korr, xerr = d*(Delta_d/2))
plt.grid(alpha = 0.5, ls = "--")
plt.xlabel("r² [m²]")
plt.ylabel("v [m/s]")
plt.legend()
plt.savefig(OUTPUT_DIRECTORY + "Plot1.png")
```



[9]:
```
#popt, pcov = curve_fit(lin, (d/2)**2,v* lambd(inner_d/2,d/2), sigma =␣
↪Delta_v_korr, absolute_sigma = True)
popt, pcov = curve_fit(lin, (d/2)**2,v_korr, sigma = Delta_v_korr,␣
↪absolute_sigma = True)
popt,np.sqrt(pcov)
```

[9]:
```
(array([2171.71727738]), array([[11.41006027]]))
```

[10]:
```
x = np.linspace(0,2e-5,100)
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar((d/2)**2,v, fmt = ".", label = "unkorrigiert", yerr = Delta_v,␣
↪xerr = d*(Delta_d/2))
plt.errorbar((d/2)**2,v_korr, fmt = ".", label = "korrigiert", yerr =␣
↪Delta_v_korr, xerr = d*(Delta_d/2))
plt.plot(x, lin(x,*popt), label = "fit", color = "turquoise")
plt.grid(alpha = 0.5, ls = "--")
plt.xlabel("r² [m²]")
plt.ylabel("v [m/s]")
plt.legend()
plt.savefig(OUTPUT_DIRECTORY + "Plot2.png")
```



[11]:
```
eta = 2 * (rho_K - rho_F) * c.g / (9 * popt[0])
Delta_eta = eta * np.sqrt((Delta_rho_F/(rho_K-rho_F))**2 + (Delta_rho_K/
 ↪(rho_K-rho_F))**2 + (np.sqrt(pcov[0][0])/popt[0])**2)
eta, Delta_eta
```

[11]:
```
(0.2382039730339909, 0.015104005583633387)
```

[12]:
```
v_lam = 2 * c.g * (rho_K - rho_F) * (d/2)**2 / (9*eta)
Delta_v_lam = v_lam * np.sqrt((2 * Delta_d/d)**2 + (Delta_eta/eta)**2 +␣
 ↪(Delta_rho_F/(rho_K - rho_F))**2 + (Delta_rho_K/(rho_K - rho_F))**2)
v_lam,Delta_v_lam
```

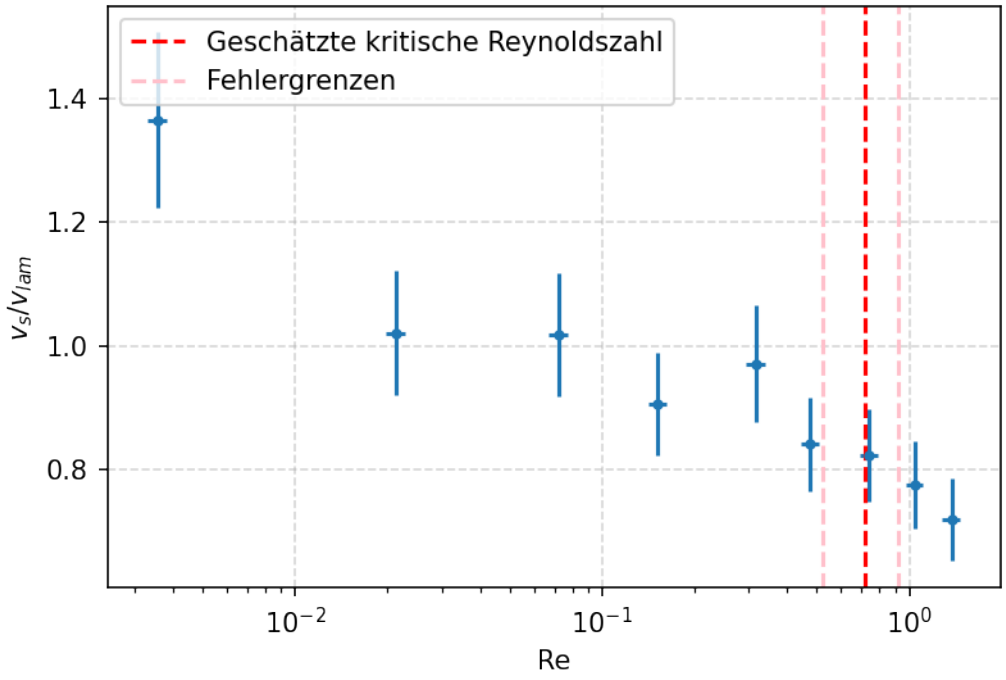
[12]:
```
(array([0.00054293, 0.00217172, 0.00488636, 0.00868687, 0.01357323,
        0.01954546, 0.02660354, 0.03474748, 0.04397727]),
 array([5.56694825e-05, 2.01847202e-04, 4.44935264e-04, 7.85177699e-04,
        1.22260937e-03, 1.75723923e-03, 2.38907039e-03, 3.11810417e-03,
        3.94434120e-03]))
```

[13]:
```
Re = rho_F * v * d / eta
Delta_Re = Re*np.sqrt((Delta_eta/eta)**2 + (Delta_rho_F/rho_F)**2 + (Delta_d/
 ↪d)**2 + (Delta_v/v)**2)
Re, Delta_Re
```

[13]:
```
(array([0.00356874, 0.02136498, 0.07190752, 0.15162246, 0.31737838,
        0.4750505 , 0.73876509, 1.03887952, 1.3721593 ]),
 array([0.00025138, 0.0015318 , 0.00523635, 0.00998018, 0.02312947,
        0.03082622, 0.04736222, 0.06714606, 0.09376173]))
```

[14]:
```
vs_vlam = v/v_lam
Delta_vs_vlam = np.sqrt((Delta_v/v_lam)**2 + (v * Delta_v_lam/v_lam**2)**2)
```

[15]:
```
plt.figure(dpi=150)
plt.errorbar(Re, vs_vlam, fmt = ".",xerr = Delta_Re , yerr = Delta_vs_vlam)
plt.xscale('log')
plt.grid(alpha = 0.5, ls = "--")
plt.xlabel("Re")
plt.ylabel("$v_s/v_{lam}$")
plt.axvline(0.72, color = "red", linestyle = "dashed", label = "Geschätzte␣
 ↪kritische Reynoldszahl")
plt.axvline(0.52, color = "pink", linestyle = "dashed", label = "Fehlergrenzen")
plt.axvline(0.92, color = "pink", linestyle = "dashed")
plt.legend()
plt.savefig(OUTPUT_DIRECTORY + "Plot3.png")
```



Aufgabe 2

[16]:
```
#Aufgabe 2 Daten
V = np.linspace(5,25,5)* 1e-6
T = np.array([130, 257,362,535,674])
Delta_T = 4
h_A = 492e-3
Delta_h_A = 1e-3
h_E = 487e-3
Delta_h_E = 1e-3
```

[17]:
```
bar_h = (h_A + h_E)/2
Delta_bar_h = 1/2 * np.sqrt(Delta_h_A ** 2 + Delta_h_E **2)
bar_h, Delta_bar_h
```

[17]:
```
(0.4895, 0.0007071067811865475)
```

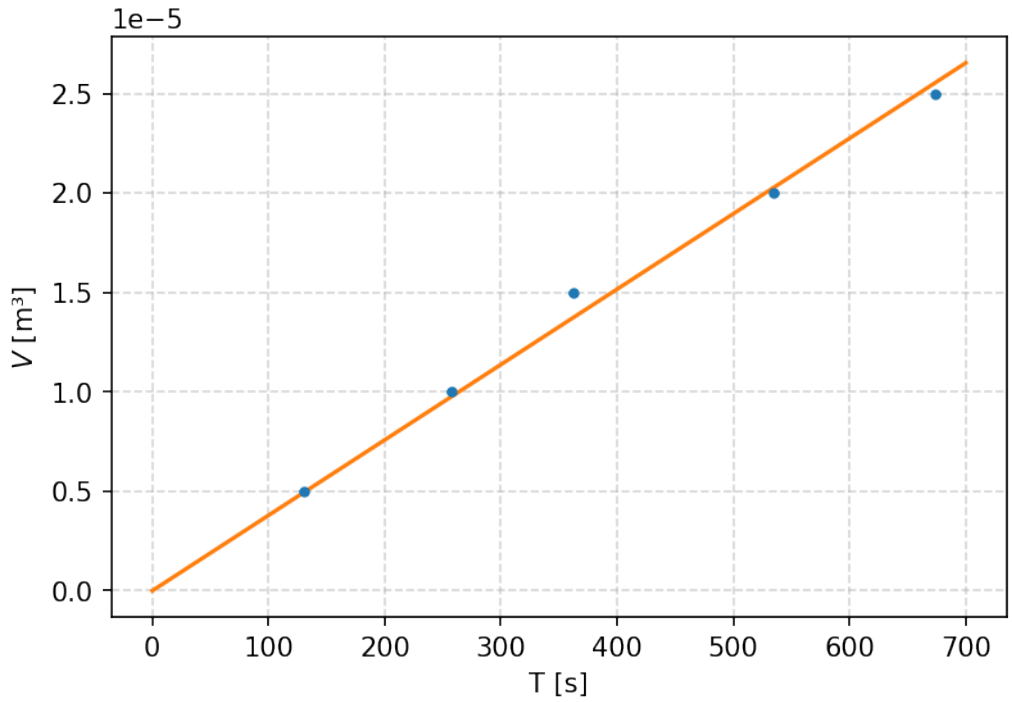
[18]:
```
p = rho_F * c.g * bar_h
Delta_p = c.g * np.sqrt((bar_h * Delta_rho_F)**2 + (Delta_bar_h * rho_F)**2)
p, Delta_p
```

[18]:
```
(5508.983605933498, 7.957997278350225)
```

[19]:
```
popt, pcov = curve_fit(lin, T, V)
popt[0]*1e9, np.sqrt(pcov[0])*1e9
```

[19]:
```
(37.92585390751148, array([0.73882483]))
```

[20]:
```
x = np.linspace(0,700,100)
plt.figure(dpi=150)
plt.errorbar(T, V, xerr = Delta_T, fmt = ".")
plt.plot(x,lin(x,*popt))
plt.grid(alpha = 0.5, ls = "--")
plt.xlabel("T [s]")
plt.ylabel("$V$ [m³]")
plt.savefig(OUTPUT_DIRECTORY + "Plot4.png")
```



[21]:
```
eta2 = np.pi * p * r_kap**4 /(8*popt[0]*L_kap)
Delta_eta2 = eta * np.sqrt((Delta_p/p)**2 + (4*Delta_r_kap/r_kap)**2 + (np.
 ↪sqrt(pcov[0][0])/popt[0])**2 + (Delta_L_kap/L_kap)**2)
eta2,Delta_eta2
```

[21]:
```
(0.18048497409283745, 0.007963633812015336)
```

[22]:
```
Re2 = 2 * rho_F * popt[0] / (np.pi * eta2 * r_kap)
Delta_Re2 = Re2 * np.sqrt((np.sqrt(pcov[0][0])/popt[0])**2 + (Delta_rho_F/
 ↪rho_F)**2 + (Delta_eta2/eta2)**2 + (Delta_r_kap/r_kap)**2)
Re2,Delta_Re2
```

[22]:
```
(0.20469690874857, 0.009966933090920319)
```